Tentamen Complexe Analyse, 22 januari 2013

het tentamen bestaat uit 5 vraagstukken. U dient **duidelijk te schrijven, duidelijke uitleg te geven en uw antwoord goed te motiveren**. De puntenverdeling over de vraagstukken kan worden gevonden aan het eind van het tentamen

1. Beschouw de reële functie $u(x, y) = xy - x + y$.

- **a.** Laat zien dat u harmonisch is op $\mathbb{R}^2$.
- **b.** Bepaal een reële functie $v(x, y)$ zodanig dat $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$ analytisch is op $\mathbb{C}$.
- **c.** Toon aan dat v harmonisch is op $\mathbb{R}^2$.

2. Beschouw de functie $g(z) = \dfrac{\cos z}{z(z - \pi)}$.

- **a.** Laat Γ_1 de cirkel $|z| = 3$ zijn, doorlopen in positieve richting. Bepaal $\int_{\Gamma_1} g(z)dz$.
- **b.** Let Γ_2 de cirkel $|z| = 4$ zijn, doorlopen in positieve richting. Bepaal $\int_{\Gamma_2} g(z)dz$.

3. Stel dat $f(z)$ de functie is gegeven door$f(z) = \dfrac{z(z - \pi)^2}{(\sin z)^2}$.

- **a.** Bepaal alle singulariteiten van f.
- **b.** Bepaal welke van deze singulariteiten 'removable' is.
- **c.** Bepaal welke van deze singulariteiten een pool van de orde 1 is.
- **d.** Bepaal welke van deze singulariteiten polen zijn van de orde 2.

4. Beschouw de complexe functie $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$.

- **a.** Bepaal de singulariteiten van $f(z)$.
- **b.** Bepaal in elk van deze singulariteiten het residu van f.
- **c.** Stel $\rho > 1$. Toon aan dat $|f(z)| \leq \dfrac{1}{\rho^2 - 1}$ voor $|z| = \rho$.

d. Laat C_ρ^+ de halfcirkel in het bovenste complexe halfvlak zijn met straal ρ, i.e. $C_\rho^+ = \{z \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ en } |z| = \rho\}$, doorlopen in positieve richting. Toon aan dat

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{C_\rho^+} f(z)dz = 0.$$

e. Verifieer met behulp van de residuen-stelling dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \pi$.

5. De stelling van Rouché's theorem is een zeer krachtig resultaat om informatie te bepalen over de nulpunten van analytische functies

a. Geeft een precieze formulering van de stelling van Rouché.

b. Beschouw het polynoom $p(z) = z^5 + 4z - 2$. Toon aan $p(z)$ precies 5 nulpunten heeft in het gebied $|z| < 2$.

c. Toon aan dat alle nulpunten van $g(z)$ in de annulus $\dfrac{1}{4} \leq |z| < 2$ liggen.

Puntenverdeling:

Problem 1: 18 (6 + 9 + 3)
Problem 2: 18 (9 + 9)
Problem 3: 18 (3 + 5 + 5 + 5)
Problem 4: 18 (2 + 4 + 4 + 4 + 4)
Problem 5: 18 (6 + 6 + 6)
10 punten gratis